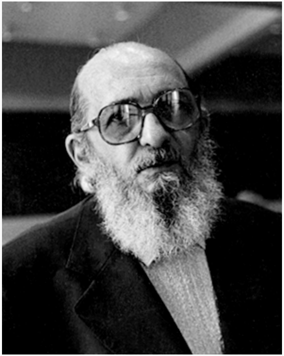
Zeros de funções: bisseção e falsa corda

Cálculo numérico

Prof. Felipe Duque
felipe.duque@ufpe.br



"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é tornar-se o opressor."
Paulo Freire

- Nas últimas aulas...
- Sistema de ponto flutuante $F(b, t, e1, e2)$;
- Erros;
- Arredondamento;
- Operações aritméticas.

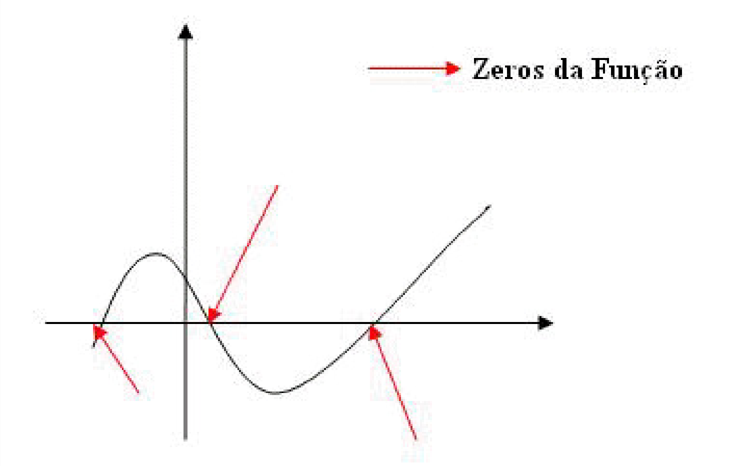
- Parte da vida de um engenheiro, físico ou administrador se reduz a resolver equações.
- Qual deve ser a tensão elétrica na antena para obter determinada distância de transmissão?
- Qual deve ser o preço máximo da energia elétrica para manter o lucro 10% maior do que o do ano passado?

- Equações podem ter os mais diversos sabores:
  - $5 \log x = sen(3x)$
  - $xy^2 - \pi x^7 = e^z$

- Toda equação com n incógnitas pode ser "transformada" na forma: $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$.

- Toda equação com n incógnitas pode ser "transformada" na forma: $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$.
- Ou seja, toda equação pode ser resolvida encontrando-se os valores das incógnitas que zeram a função.

- Toda equação com n incógnitas pode ser "transformada" na forma: $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$.
- Ou seja, toda equação pode ser resolvida encontrando-se os valores das incógnitas que zeram a função.
- Precisamos encontrar os zeros das funções.


Zeros da Função

- Sabemos como encontrar facilmente os zeros de algumas funções, como polinômios de primeiro e segundo grau.
- Por que, então, queremos estudar isso em cálculo numérico?

- Sabemos como encontrar facilmente os zeros de algumas funções, como polinômios de primeiro e segundo grau.
- Por que, então, queremos estudar isso em cálculo numérico?
- Porque existem funções muito complicadas, para as quais não temos métodos diretos de resolver.

- Métodos diretos:
  - são analíticos: cada função exige certa "arte";
  - requerem, sempre, número finito de operações.

- Métodos iterativos:
  - partem de uma aproximação inicial da solução;
  - são geradas aproximações a cada iteração;
  - concluem o processo quando uma solução "satisfatória" for encontrada.

- Métodos iterativos:
  - partem de uma aproximação inicial da solução;
  - são geradas aproximações a cada iteração;
  - concluem o processo quando uma solução "satisfatória" for encontrada.
- Nosso foco é nos iterativos!

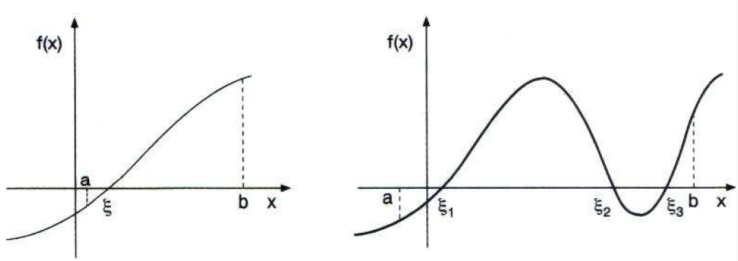
- Métodos numéricos se baseiam em:
    1. localizar ou isolar as raízes;
    2. refinar a aproximação inicial.

- Vamos isolar uma raiz.
- Isso servirá como uma aproximação inicial para a etapa de refinamento.
- O isolamento deverá produzir uma região que contenha exatamente uma raiz.

- Como podemos realizar esse isolamento?

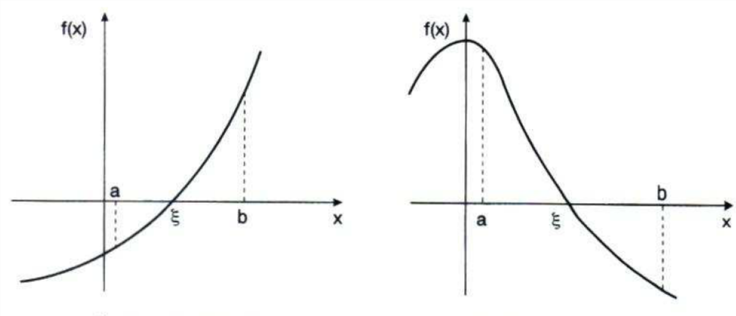
- Como podemos realizar esse isolamento?
- Isso pode ser feito na força bruta:
  - variamos x;
  - avaliamos $f(x)$ para cada x;
  - se houver mudança de sinal em $f(x)$ entre x_i e x_{i+1}, há pelo menos um zero entre x_i e x_{i+1}.

- Em 1817, Bolzano escreveu isso de forma mais elegante (Teorema de Bolzano):
  - Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$.
  - Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $x = \epsilon$ entre a e b que é zero de $f(x)$.


f(x)
a
ξ
b
x
f(x)
a
ξ_1
ξ_2
ξ_3
b
x

- Como garantir que haja exatamente uma raiz?

- Como garantir que haja exatamente uma raiz?
- Se o teorema de Bolzano for satisfeito e...
- se $f'(x)$ existir e preservar o sinal em $[a, b]$, então há apenas uma raiz nesse intervalo.



$f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ $\qquad$ $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$

- Então, a aproximação inicial fornece um intervalo $[a; b]$ com apenas uma raiz.
- Para encontrar $[a; b]$, podemos tabelar $f(x)$ para vários x e analisar se houve mudança de sinal em $f(x)$.
  - Se sim, avaliamos se $f'(x)$ é monotônica (não muda de sinal) no intervalo considerado.

Exemplo 1

- Encontrar intervalos contendo um único zero em $f(x) = x^3 - 9x + 3$.

Exemplo 1

- Encontrar intervalos contendo um único zero em $f(x) = x^3 - 9x + 3$.

x	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Exemplo 1

- Encontrar intervalos contendo um único zero em $f(x) = x^3 - 9x + 3$.

x	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Polinômio tem grau 3, então, com 3 mudanças de sinal, cada região tem apenas uma raiz.

Exemplo 2

- Encontrar intervalos contendo um único zero em $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$.

Exemplo 2

- Encontrar intervalos contendo um único zero em $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$.
- Qual é o domínio de $f(x)$?

Exemplo 2

- Encontrar intervalos contendo um único zero em $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$.
- Qual é o domínio de $f(x)$? $\mathbb{R}^+$.

Exemplo 2

- Encontrar intervalos contendo um único zero em $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$.
- Qual é o domínio de $f(x)$? $\mathbb{R}^+$.

x	0	1	2	3
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Exemplo 2

- Encontrar intervalos contendo um único zero em $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$.
- Qual é o domínio de $f(x)$? $\mathbb{R}^+$.

x	0	1	2	3
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

- Há pelo menos um zero em $[1;2]$.

Exemplo 2

- Temos que avaliar a derivada.

Exemplo 2

- Temos que avaliar a derivada.
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x}$.

Exemplo 2

- Temos que avaliar a derivada.
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x}$.
- Note que $f'(x) > 0 \ \forall x > 0$.
- Logo, f' não muda de sinal entre $[1; 2]$

Exemplo 2

- Temos que avaliar a derivada.
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x}$.
- Note que $f'(x) > 0 \ \forall x > 0$.
- Logo, f' não muda de sinal entre $[1; 2]$
- Logo, há apenas uma raiz em $[1; 2]$.

- Ok, somos capazes de encontrar uma aproximação inicial de regiões onde há apenas um zero.

- Ok, somos capazes de encontrar uma aproximação inicial de regiões onde há apenas um zero.
- Falta, agora, refinar essa região.
- Todos os métodos desta aula partem sempre de um intervalo de separação.

Método da bisseção

Método da bisseção

- O objetivo é reduzir a amplitude do intervalo até se atingir a precisão requerida.
- Utiliza a sucessiva divisão de $[a; b]$ ao meio.
- Como concluir o processo?

Método da bisseção

- O objetivo é reduzir a amplitude do intervalo até se atingir a precisão requerida.
- Utiliza a sucessiva divisão de $[a; b]$ ao meio.
- Como concluir o processo?
  - Amplitude do intervalo $[a; b]$ ou

Método da bisseção

- O objetivo é reduzir a amplitude do intervalo até se atingir a precisão requerida.
- Utiliza a sucessiva divisão de $[a; b]$ ao meio.
- Como concluir o processo?
  - Amplitude do intervalo $[a; b]$ ou
  - proximidade de zero ou

Método da bisseção

- O objetivo é reduzir a amplitude do intervalo até se atingir a precisão requerida.
- Utiliza a sucessiva divisão de $[a; b]$ ao meio.
- Como concluir o processo?
  - Amplitude do intervalo $[a; b]$ ou
  - proximidade de zero ou
  - número de iterações.

Método da bisseção

Exemplo de bisseção

- Determinar, usando o método da bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função $f(x) = 2^{-x} - 2sen(x)$.

Exemplo de bisseção

- Determinar, usando o método da bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função $f(x) = 2^{-x} - 2sen(x)$.
  - Esboce o gráfico;
  - Obtenha um intervalo de aproximação inicial;
  - Execute a bisseção.

Exemplo de bisseção

Iteração **i**	***a***	***b***	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	***c***
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,500000	-0,251744	1,00000
1	0,000000	0,500000	1,000000	-0,251744	0,250000	0,346088	0,50000
2	0,250000	0,500000	0,346088	-0,251744	0,375000	0,038560	0,25000
3	0,375000	0,500000	0,038560	-0,251744	0,437500	-0,108939	0,12500
4	0,375000	0,437500	0,038560	-0,108939	0,406250	-0,035752	0,06250
5	0,375000	0,406250	0,038560	-0,035752	0,390625	0,001266	0,03125

Exemplo de bisseção

- Valor real: $x = 0{,}391158$
- Valor obtido na iteração 5: $x = 0{,}390625$
- É como se houvesse um "motor" que gera os x: $\frac{a+b}{2}$.

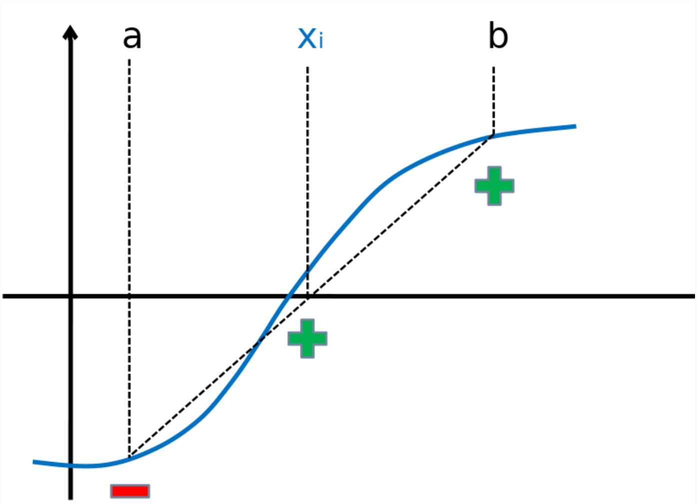
Precisão pré-estabelecida

- Podemos prever o menor número de iterações para que a precisão estabelecida seja alcançada.
- $k \geq \frac{(\ln(b_0 - a_0) - \ln(t))}{\ln(2)}$,
- onde $[a_0; b_0]$ é o intervalo inicial, e t é o intervalo de separação desejado.

Limitação da bisseção

- O método não funciona se a função apenas tangenciar o eixo x.

Método da falsa corda ou das cordas, ou falsa posição


a
xi
b

- Aproxima $f(x)$ a uma reta entre $[a; b]$;
- x_i é o x que zera a equação da reta entre $[a; b]$;
- O novo b é $f(x_i)$.

- Qual é a equação da reta y que passa pelos pares $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$?
- Deduza!

- Qual é a equação da reta y que passa pelos pares $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$?
- Deduza!

$$y = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - b) + f(b)$$

- Qual é o próximo passo?

- Qual é o próximo passo?
- Encontrar x que zera y. Deduza!

- Qual é o próximo passo?
- Encontrar x que zera y. Deduza!
- Esse é o "motor gerador" de x.

$$x = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$$

Exemplo de falsa corda

- Determinar, usando o método das cordas, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função: $f(x) = sen(x) + \ln x$
- Considere o intervalo $[0{,}5; 0{,}6]$.

Exemplo de falsa corda

Iteração **i**	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
1	0,50000	0,600000	-0,213722	0,053817	0,579884	0,003001	—
2	0,50000	0,579884	-0,213722	0,003001	0,578778	0,000166	0,001106
3	0,50000	0,578778	-0,213722	0,000166	0,578717	0,000009	0,000061
4	0,50000	0,578717	-0,213722	0,000009	0,578714	0,000001	0,000003

Resumindo. . .

Resumindo...

- Obter aproximação inicial (como?);

Resumindo...

- Obter aproximação inicial (como?);
- Verificar teorema de Bolzano e sinal da derivada;

Resumindo. . .

- Obter aproximação inicial (como?);
- Verificar teorema de Bolzano e sinal da derivada;
- Aplicar uma das duas “máquinas geradoras” de x;
- Checar convergência: distância pro 0 e/ou quantidade de iterações e/ou comprimento do intervalo.

Exemplo

- Encontrar a raiz aproximada da função a seguir via falsa corda e bisseção: $f(x) = sen(x) - \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$.

Perguntas?